



## Champs de repères 2D non orthogonaux

David Desobry, Etienne Corman, Nicolas Ray, Dmitry Sokolov

### ► To cite this version:

David Desobry, Etienne Corman, Nicolas Ray, Dmitry Sokolov. Champs de repères 2D non orthogonaux. Journées Françaises d'Informatique Graphique (JFIG2020), Nov 2020, Nancy, France. pp.1 - 5. hal-02992596

**HAL Id: hal-02992596**

**<https://inria.hal.science/hal-02992596>**

Submitted on 6 Nov 2020

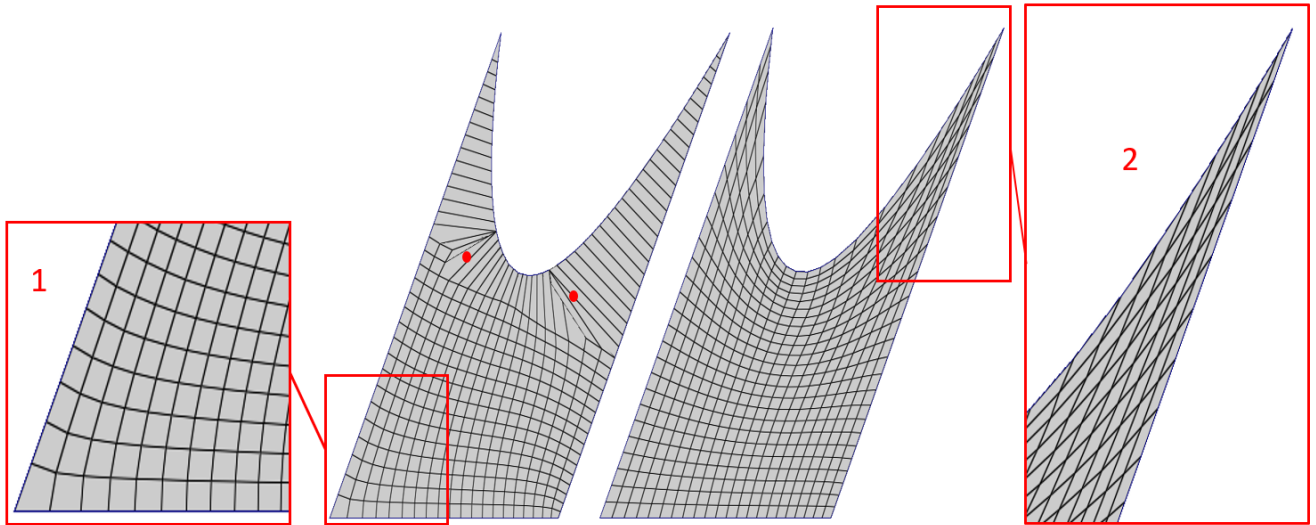
**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Champs de repères 2D non orthogonaux

David Desobry, Etienne Corman, Nicolas Ray et Dmitry Sokolov

Université de Lorraine, CNRS, Inria, LORIA, F-54000 Nancy, France



**Figure 1:** Maillages quadrangulaires obtenus à partir d'un champ de repère orthogonal (gauche) et non-orthogonal (droite). Dans les cas où les quadrangles doivent être très cisailés, par exemple sur les coins, forcer les repères locaux à être orthogonaux n'est pas pertinent. Le zoom 1 nous montre que pousser chaque quadrilatère à ressembler à un carré provoque une distorsion des lignes de quadrilatères, alors que pousser chacun à ressembler à un losange génère des lignes de quadrilatères beaucoup moins distordus. De plus, dans les cas de coins très aigus (zoom 2), la contrainte d'orthogonalité fait habituellement échouer le remaillage. En relaxant cette contrainte, nous obtenons une quadrangulation valide. Enfin, un champ de repère orthogonal génère sur cette figure deux singularités (points rouges), alors qu'un champ non orthogonal n'en génère aucune.

## Introduction

Les maillages quadrangulaires utilisés pour les simulations numériques 2D sont fortement structurés: ils ressemblent presque partout à une grille déformée. Une façon de générer de tels maillages consiste à définir une orientation cible pour la grille, puis à y placer les quadrangles. Nous nous intéressons ici à la façon de définir l'orientation cible.

Cette orientation est donnée par un repère local défini en chaque point du domaine. Il est habituellement choisi comme étant orthonormé et, sur le bord du domaine, l'un de ses vecteurs est contraint à être perpendiculaire au bord. Pour obtenir des grilles peu déformées, les repères sont interpolés à l'intérieur du domaine de sorte à minimiser la rotation qu'ils subissent lorsque l'on se déplace dans le domaine. La stratégie de génération de champs de repères est ainsi de fixer des contraintes au bord puis, par optimi-

sation numérique, de trouver le champ qui minimise une certaine mesure de la distorsion du champ.

La grande difficulté de cette interpolation vient de la topologie du champ, et en particulier des singularités autour desquelles l'intégrale du carré de la rotation diverge. Il a donc fallu définir d'autres mesures de la rotation du champ. Cette étude présente comment la norme  $L^4$  définit une distance entre deux repères, qui peut être minimisée afin de produire des champs de repère lisses (cf section 1). Nous verrons comment cette vision du problème se ramène aux solutions classiques de génération de champs de repère dans le cas où ils sont orthonormés. Par le même raisonnement, nous introduisons un degré de liberté supplémentaire par repère, en relaxant la contrainte d'orthogonalité (cf section 2).

Notre algorithme génère des champs de repère en échantillonnant les repères sur les faces d'une triangulation du domaine, et en min-

imisant la distorsion entre échantillons voisins. Afin d'éviter des angles trop aigus dans le maillage final, nous ajoutons un terme (optionnel) pénalisant les repères dont les vecteurs sont trop proches (cf Fig 7). Cette énergie est minimisée avec une méthode de type quasi Newton (LBFGS), ce qui permet d'intégrer la contrainte d'unité des vecteurs du repère sous forme d'un terme de pénalité.

## État de l'art

Le domaine de génération de champ de repère est très actif depuis la dernière décennie [VCD\*17]. D'abord introduits en infographie [HZ00], les champs de repère sont actuellement très utilisés pour la génération de maillages quadrangulaires par paramétrisation globale : d'abord dans [RLL\*06], puis dans [BZK09, KNP07]. Depuis, les innovations significatives sont portées sur la robustesse de cette génération, en commençant par [BCE\*13]. Les travaux qui ont suivi [MPZ14, CBK15] sont basés sur des *motorcycle graphs* : une décomposition de la surface à partir des lignes du champ de repère. Générer un champ de repère avec peu de distorsion est donc primordial pour générer des maillages quadrangulaires de bonne qualité.

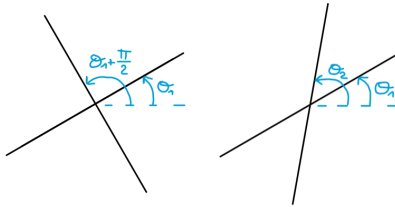
Cet article présente un raisonnement menant à une méthode d'optimisation d'un champ de repère orthonormé §1, puis adapte ce raisonnement pour qu'il mène à une méthode d'optimisation d'un champ de repère normé, non-orthogonal §2. Cette nouvelle méthode permet d'ores et déjà d'améliorer la génération de maillages quadrangulaires §3, et offre une base théorique solide que nous espérons pouvoir étendre au cas volumique.

## 1 Champ de repère orthonormé contraint

Cette première section va présenter une méthode pour obtenir un champ de repère orthogonal contraint sur un bord. Nous commençons par présenter la façon dont nous représentons mathématiquement un tel repère §1.1, puis nous construisons une mesure de distorsion entre deux repères orthogonaux §1.2. Cette mesure de distorsion utilise la norme  $L^4$  des repères à comparer, que nous étudions pour simplifier son expression §1.3. Enfin, nous minimisons numériquement les distorsions d'un champ de repère contraint §1.4.

### 1.1 Représentation d'un champ de repères orthonormés

A partir de la base canonique de  $\mathbb{R}^2$  :  $B_0 = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ , on peut définir l'ensemble des bases orthonormées de  $\mathbb{R}^2$ , en appliquant



**Figure 2:** Représentation d'une croix orthogonale (gauche) et non orthogonale (droite)

une rotation  $R_\theta$  à  $B_0$  :

On définit la famille des bases orthonormées  $(B_\theta)_{\theta \in \mathbb{R}}$  par

$$\begin{aligned} \forall \theta \in \mathbb{R}, B_\theta &= R_\theta \cdot B_0 \\ &= \left( R_\theta \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, R_\theta \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= \left( \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

Chaque base  $B_\theta$  représente un repère orthonormé dont un axe est orienté par  $\theta$ , l'autre par  $\theta + \pi/2$ .

Ce repère est schématisé sur la figure 2.

La problématique est d'avoir le moins de courbure possible entre les axes de notre champ de repère. Il faut donc une mesure de distorsion entre les axes de deux repères orthonormés.

### 1.2 Mesure de distorsion entre les axes des repères

Pour mesurer cette distorsion on peut prendre plusieurs points aléatoires dans  $\mathbb{R}^2$  et comparer les coordonnées de ces points dans les deux repères.

Par exemple, en prenant le point  $P_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ , ses coordonnées dans  $B_{\theta_1}$  sont  $P_{\theta_1} = R_{\theta_1}^{-1} P_0 = \begin{pmatrix} \cos \theta_1 \\ -\sin \theta_1 \end{pmatrix}$ , et celles dans  $B_{\theta_2}$  sont  $P_{\theta_2} = R_{\theta_2}^{-1} P_0 = \begin{pmatrix} \cos \theta_2 \\ -\sin \theta_2 \end{pmatrix}$ .

Cependant, une même orientation des axes peut être définie par 4 repères différents  $(\theta_1 + k\pi/2)$ . Nous souhaiterions donc que la distorsion entre ces 4 repères soit nulle.

Nous voulons utiliser une mesure, intrinsèquement  $\pi/2$  périodique, propre à chaque repère orthonormé de  $\mathbb{R}^2$ . Les normes  $p$  correspondent parfaitement à ce cahier des charges (par soucis de simplicité, nous utilisons une définition sans racine  $p$ -ième).

$$N_p \left( \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\|_p = |x|^p + |y|^p$$

La figure 3 met en avant les propriétés des normes- $p$  en fonction du choix de  $p$ .

- La norme 1 n'est pas un bon choix car elle est difficile à optimiser et il y a des valeurs absolues à gérer.
- La norme 2 n'est pas un bon choix car sa définition reste identique sur un repère que l'on tourne, elle ne permettra pas de distinguer nos repères.
- La norme 4 est le choix acceptable le plus simple, sa définition varie selon l'orientation du repère, mais reste identique par rotation de  $\pi/2$ .

### 1.3 Étude de la norme 4 d'une base orthonormée $B_\theta$

Soit  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  un point de  $\mathbb{R}^2$ , sa norme 4 dans la base  $B_\theta$  est

$$\begin{aligned}
N_{4, B_\theta} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \left\| R_\theta^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\|_4 \\
&= \left\| \begin{pmatrix} x \cos \theta + y \sin \theta \\ -x \sin \theta + y \cos \theta \end{pmatrix} \right\|_4 \\
&= (x \cos \theta + y \sin \theta)^4 + (-x \sin \theta + y \cos \theta)^4
\end{aligned}$$

Avec le changement de variable

$$\begin{aligned}
x &\leftarrow \rho \cos t \\
y &\leftarrow \rho \sin t
\end{aligned}$$

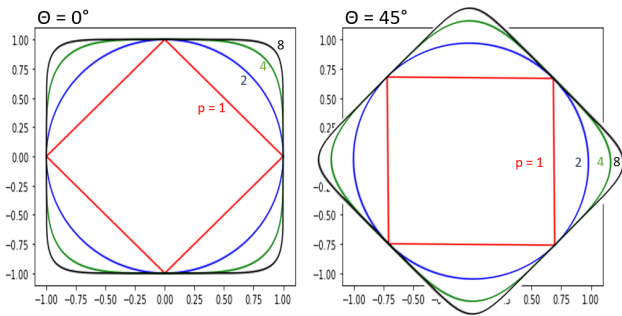
on obtient:

$$\begin{aligned}
N_{4, B_\theta} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= (\rho \cos t \cos \theta + \rho \sin t \sin \theta)^4 \\
&\quad + (-\rho \cos t \sin \theta + \rho \sin t \cos \theta)^4 \\
&= \frac{\rho^4}{4} (3 + \cos 4t \cos 4\theta + \sin 4t \sin 4\theta)
\end{aligned}$$

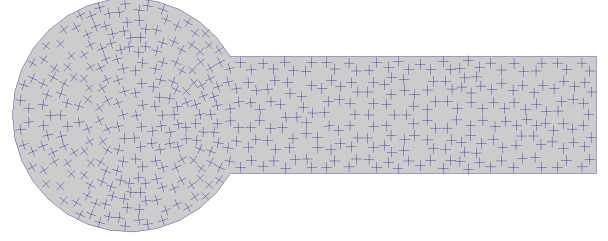
Une mesure de distorsion entre les axes des repères orthonormés formés par les bases  $B_{\theta_1}$  et  $B_{\theta_2}$  est donc :

$$\begin{aligned}
N_{4, B_{\theta_1}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - N_{4, B_{\theta_2}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\
= \frac{\rho^4}{4} (\cos 4t (\cos 4\theta_1 - \cos 4\theta_2) + \sin 4t (\sin 4\theta_1 - \sin 4\theta_2))
\end{aligned}$$

On ne veut pas que notre mesure de distorsion dépende du point choisi  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \cos t \\ \rho \sin t \end{pmatrix}$ . Nous allons donc "sommer" les distorsions de tous les points du cercle unité, c'est à dire calculer :



**Figure 3:** Etude de l'isovaleur  $\left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\|_p = 1$  (norme  $p$  d'un repère non rotationné), par rapport à l'isovaleur  $\left\| R_{\pi/4}^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\|_p = 1$  (norme  $p$  d'un repère tourné de  $\pi/4$ )



**Figure 4:** Exemple de champ de repère orthonormé contraint au bord avec le moins de distorsion possible

$$\begin{aligned}
D(B_{\theta_1}, B_{\theta_2}) &= \int_0^{2\pi} \left| N_{4, B_{\theta_1}} \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} - N_{4, B_{\theta_2}} \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \right|^2 dt \\
&\propto (\cos 4\theta_1 - \cos 4\theta_2)^2 + (\sin 4\theta_1 - \sin 4\theta_2)^2
\end{aligned}$$

On ne gagnerait rien à intégrer sur un ensemble plus grand de points, par un exemple un disque, car cela reviendrait simplement à multiplier le résultat par une constante. Le seul paramètre qui change le comportement de la distorsion entre deux repères est l'angle  $t$ , et tous ces angles sont représentés de façon uniforme sur le cercle unité.

Le but maintenant est de minimiser, dans notre champ, la distorsion  $D(B_{\theta_1}, B_{\theta_2}) = (\cos 4\theta_1 - \cos 4\theta_2)^2 + (\sin 4\theta_1 - \sin 4\theta_2)^2$  entre chaque couple de repère adjacent  $(i, j)$  du champ

#### 1.4 Optimisation d'un champ de repère orthonormé contraint

Plutôt que de directement optimiser les variables  $\theta_i$ , nous préférons optimiser les variables  $\alpha_i = \cos 4\theta_i$  et  $\beta_i = \sin 4\theta_i$  pour définir une optimisation linéaire. L'énergie à minimiser est alors :

$$E = \sum_{i,j} ((\alpha_i - \alpha_j)^2 + (\beta_i - \beta_j)^2)$$

Minimiser  $E$  revient à minimiser les distorsions du champ de repère.

Les champs de repères sont utiles notamment quand ils sont alignés avec le bord, et donc quand la totalité du bord est sur une valeur constante d'une des coordonnées du repère local.

Nous allons donc ajouter ces contraintes sur tous les repères  $i$  adjacent à un bord, avec  $\eta_i$  l'angle de la normale au bord:

$$\begin{aligned}
\alpha_i &= \cos 4\eta_i \\
\beta_i &= \sin 4\eta_i
\end{aligned}$$

L'optimisation de ce problème donne des champs de repère orthonormés comme illustré par la Figure 4. Une autre façon de voir le problème mais qui mène strictement au même résultat dans le cas orthogonal est donné dans [RSL16]. Cette minimisation d'énergie ne garantit pas la conservation de la norme :  $\cos^2 4\theta + \sin^2 4\theta$ . Contraindre la norme globale du champ peut être fait de façon peu coûteuse [KCPS13], mais contraindre la norme de chaque repère l'est

beaucoup plus [BLH\*17].

Bien que souvent optionnelle dans le cas orthogonal, ajouter cette contrainte de norme se montre primordial dans notre optimisation non-orthogonale pour avoir des résultats exploitables. Nous présenterons donc une façon simple de le faire dans 2.3.

## 2 Champ de repère normé, non-orthogonal, contraint

Cette seconde section reprend le raisonnement de la première section pour minimiser les distorsions d'un champ de repère non orthogonal. Nous présentons dans un premier temps la représentation d'un repère non orthogonal que nous utilisons §2.1, puis nous étudions l'expression de la norme 4 comme mesure de distorsion, cette fois pour des repères non orthogonaux §2.2. Enfin, nous réadaptions un peu cette mesure pour résoudre le problème de minimisation de distorsion d'un champ non orthogonal avec contraintes §2.3.

### 2.1 Représentation

On définit la famille des bases normées, non orthogonales  $(B_{\theta_1, \theta_2})_{\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}}$  par :

$$\begin{aligned} \forall \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}, B_{\theta_1, \theta_2} &= R_{\theta_1, \theta_2} \cdot B_0 \\ &= \left( R_{\theta_1, \theta_2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, R_{\theta_1, \theta_2} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= \left( \begin{pmatrix} \cos \theta_1 \\ \sin \theta_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos \theta_2 \\ \sin \theta_2 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

Chaque base  $B_{\theta_1, \theta_2}$  représente un repère normé, non orthogonal dont un axe est orienté par  $\theta_1$ , l'autre par  $\theta_2$ . Ce repère est schématisé sur la figure 2.

La problématique est la même que pour un champ de repère orthonormé : avoir le moins de distorsion possible entre les axes des repères de notre champ, et donc dans les lignes de quadrilatères générés ensuite. (Fig 5)

### 2.2 Norme-4 comme mesure de distorsion

On peut transposer notre approche du cas orthogonal, pour créer une mesure de distorsion entre deux repères normés, non orthogonaux.

Soit  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  un point de  $\mathbb{R}^2$ , sa norme 4 dans la base  $B_{\theta_1, \theta_2}$  est

$$\begin{aligned} N_{4, B_{\theta_1, \theta_2}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \left\| R_{\theta_1, \theta_2}^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\|_4 \\ &= \left\| \begin{pmatrix} x \cos \theta_1 + y \sin \theta_1 \\ x \cos \theta_2 + y \sin \theta_2 \end{pmatrix} \right\|_4 \\ &= (x \cos \theta_1 + y \sin \theta_1)^4 + (x \cos \theta_2 + y \sin \theta_2)^4 \end{aligned}$$

Avec le changement de variable

$$\begin{aligned} x &\leftarrow \rho \cos t \\ y &\leftarrow \rho \sin t \end{aligned}$$

on obtient:

$$\begin{aligned} N_{4, B_{\theta_1, \theta_2}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= (\rho \cos t \cos \theta_1 + \rho \sin t \sin \theta_1)^4 + (\rho \cos t \cos \theta_2 + \rho \sin t \sin \theta_2)^4 \\ &= \frac{\rho^4}{8} (6 + \cos 4t (\cos 4\theta_1 + \cos 4\theta_2) + \sin 4t (\sin 4\theta_1 + \sin 4\theta_2) \\ &\quad + 4 \cos 2t (\cos 2\theta_1 + \cos 2\theta_2) + 4 \sin 2t (\sin 2\theta_1 + \sin 2\theta_2)) \end{aligned}$$

Comme pour le cas orthogonal, plutôt que de comparer les normes 4 de deux repères sur un seul point aléatoire, nous allons les comparer sur tous les points du cercle unité ( $\rho$  ne joue qu'un rôle de redimensionnement comme pour le cas orthogonal).

On définit donc la distorsion entre les axes des repères orthonormés formés par les bases  $B_{\theta_1}$  et  $B_{\theta_2}$

$$\begin{aligned} D(B_{\theta_1, \theta_2}, B_{\Theta_1, \Theta_2}) &= \int_0^{2\pi} \left| N_{4, B_{\theta_1, \theta_2}} \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} - N_{4, B_{\Theta_1, \Theta_2}} \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \right|^2 dt \\ &\propto ((\cos 4\theta_1 + \cos 4\theta_2) - (\cos 4\Theta_1 + \cos 4\Theta_2))^2 \\ &\quad + ((\sin 4\theta_1 + \sin 4\theta_2) - (\sin 4\Theta_1 + \sin 4\Theta_2))^2 \\ &\quad + (4(\cos 2\theta_1 + \cos 2\theta_2) - 4(\cos 2\Theta_1 + \cos 2\Theta_2))^2 \\ &\quad + (4(\sin 2\theta_1 + \sin 2\theta_2) - 4(\sin 2\Theta_1 + \sin 2\Theta_2))^2 \end{aligned}$$

### 2.3 Optimisation contrainte

On pose

$$\begin{cases} a_i = \cos 4\theta_{1,i} + \cos 4\theta_{2,i} \\ b_i = \sin 4\theta_{1,i} + \sin 4\theta_{2,i} \\ c_i = 4(\cos 2\theta_{1,i} + \cos 2\theta_{2,i}) \\ d_i = 4(\sin 2\theta_{1,i} + \sin 2\theta_{2,i}) \end{cases}$$

De la mesure de distorsion définie précédemment, nous dérivons la fonction objectif suivante :

$$E = \sum_{i,j} ((a_i - a_j)^2 + (b_i - b_j)^2 + (c_i - c_j)^2 + (d_i - d_j)^2)$$

Pour chaque repère du bord, on veut que l'une des deux branches soit orthogonale au bord pour la même raison que dans le cas orthogonal. En posant  $\eta_i$  l'angle de la normale au bord, nous voulons au choix :

$$\theta_{1,i} = \eta_i \text{ ou } \theta_{2,i} = \eta_i$$

Aucune de nos variables  $a_i, b_i, c_i, d_i$  ne nous permet d'exprimer simplement cette contrainte. Nous allons donc poser 4 variables plus simples à contraindre :

$$\begin{cases} x_i = \cos 2\theta_{1,i} \\ y_i = \sin 2\theta_{1,i} \\ z_i = \cos 2\theta_{2,i} \\ w_i = \sin 2\theta_{2,i} \end{cases}$$

Ce qui nous donne les expressions à optimiser suivantes :

$$\begin{cases} a_i = (x_i^2 - y_i^2 + z_i^2 - w_i^2) \\ b_i = 2(x_i y_i + z_i w_i) \\ c_i = 4(x_i + z_i) \\ d_i = 4(y_i + w_i) \end{cases}$$

Nous pouvons maintenant contraindre  $\theta_i = \eta_i$  sur le bord par  $x_i = \cos(2\eta_i)$  et  $y_i = \sin(2\eta_i)$ .

Le champ final est obtenu en minimisant E, sous ces contraintes de bords.

Tout comme pour le cas orthogonal, utiliser les variables  $a_i, b_i, c_i, d_i$  suppose un respect des lois trigonométriques telles que  $\cos 4\theta_{1,i}^2 + \sin 4\theta_{1,i}^2 = 1$ . En pratique, nous pénalisons les repères dont la norme n'est pas unitaire avec l'énergie suivante :

$$\sum_i |x_i^2 + y_i^2 - 1|^2 + |z_i^2 + w_i^2 - 1|^2$$

De même, il est généralement intéressant d'éviter que les quadrangles aient des angles trop aigus, ce qui se traduit ici par l'ajout dans l'énergie d'un terme favorisant l'orthogonalité :

$$|x_i + z_i|^2 + |y_i + w_i|^2$$

### 3 Évaluation des résultats

En n'incluant pas le terme favorisant l'orthogonalité, lorsqu'un champ constant peut respecter les contraintes de bord, nous pouvons vérifier que notre algorithme est capable de le trouver (voir Figure 5). Avec des contraintes plus sévères, capables de faire échouer les algorithmes de remaillage utilisant des champ orthogonaux, notre solution continue à bien fonctionner (voir Figure 6).

Dans certains cas, le terme favorisant l'orthogonalité est tout de même nécessaire pour assurer une bonne qualité des quadrangles. La Figure 7 montre comment ce terme influe sur le résultat: lorsqu'il est absent (à gauche) les deux axes des repères deviennent presque colinéaires pour éviter de placer des singularités, lorsqu'il est prépondérant (à droite) la solution est celle des champs orthogonaux classiques, un compromis (au milieu) permet de limiter le nombre de singularités et l'écrasement des repères.

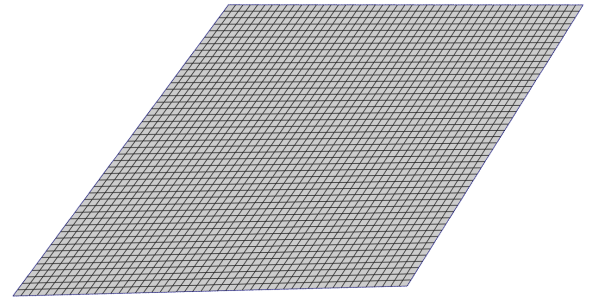
Nous avons également testé d'autres modèles (Figure 8) avec un faible poids associé au terme d'orthogonalité ( $10^{-2}$ ).

### Conclusion

Générer des champs de repères lisses non orthogonaux est difficile car nous voulons autoriser les permutations d'axes. Une approche frontale aurait abouti à un problème d'optimisation avec des variables entière représentant ces permutations, ce qui aurait été très complexe à optimiser. Nous avons préféré définir un espace 4D dans lequel nous pouvons comparer deux repères non orthogonaux directement par une norme  $L^2$ . Outre l'amélioration de la robustesse du processus de génération de maillage quadrangulaire et de la qualité de ses résultats, ces travaux posent aussi les bases théoriques nécessaires à explorer son extension au cas volumique.

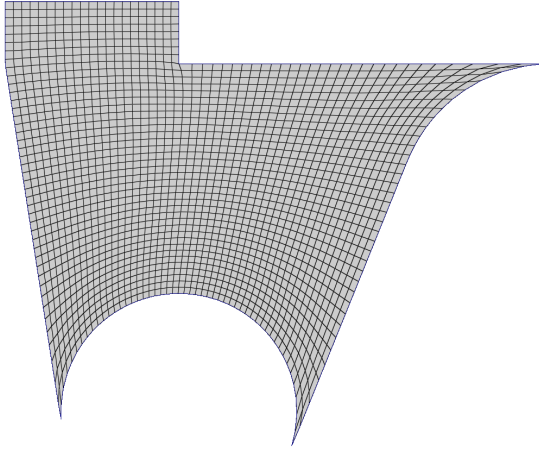
### References

- [BCE\*13] BOMMES D., CAMPEN M., EBKE H.-C., ALLIEZ P., KOBELT L.: Integer-grid maps for reliable quad meshing. *ACM Trans. Graph.* 32, 4 (July 2013), 98:1–98:12. URL: <http://doi.acm.org/10.1145/2461912.2462014>, doi:10.1145/2461912.2462014. 2
- [BLH\*17] BEAUFORT P., LAMBRECHTS J., HENROTTE F., GEUZAIN C., REMACLE J.: Computing two dimensional cross fields - A PDE approach based on the ginzburg-landau theory. *CoRR abs/1706.01344* (2017). URL: <http://arxiv.org/abs/1706.01344>, arXiv:1706.01344. 4
- [BZK09] BOMMES D., ZIMMER H., KOBELT L.: Mixed-integer quadrangulation. *ACM Trans. Graph.* 28, 3 (July 2009), 77:1–77:10. URL: <http://doi.acm.org/10.1145/1531326.1531383>, doi:10.1145/1531326.1531383. 2
- [CBK15] CAMPEN M., BOMMES D., KOBELT L.: Quantized global parametrization. *ACM Trans. Graph.* 34, 6 (Oct. 2015). URL: <https://doi.org/10.1145/2816795.2818140>, doi:10.1145/2816795.2818140. 2
- [HZ00] HERTZMANN A., ZORIN D.: Illustrating smooth surfaces. In *PROCEEDINGS OF SIGGRAPH 2000* (2000), pp. 517–526. 2
- [KCPS13] KNÖPPEL F., CRANE K., PINKALL U., SCHRÖDER P.: Globally optimal direction fields. *ACM Trans. Graph.* 32, 4 (2013). 3
- [KNP07] KAELEBERER F., NIESER M., POLTHIER K.: QuadCover - Surface Parameterization using Branched Coverings. *Computer Graphics Forum* (2007). doi:10.1111/j.1467-8659.2007.01060.x. 2
- [MPZ14] MYLES A., PIETRONI N., ZORIN D.: Robust field-aligned global parametrization. *ACM Trans. Graph.* 33, 4 (July 2014). URL: <https://doi.org/10.1145/2601097.2601154>, doi:10.1145/2601097.2601154. 2
- [RLL\*06] RAY N., LI W. C., LÉVY B., SHEFFER A., ALLIEZ P.: Periodic global parameterization. *ACM Trans. Graph.* 25, 4 (Oct. 2006), 1460–1485. URL: <http://doi.acm.org/10.1145/1183287.1183297>, doi:10.1145/1183287.1183297. 2
- [RSL16] RAY N., SOKOLOV D., LÉVY B.: Practical 3d frame field generation. *ACM Trans. Graph.* 35, 6 (Nov. 2016). URL: <https://doi.org/10.1145/2980179.2982408>, doi:10.1145/2980179.2982408. 3
- [VCD\*17] VAXMAN A., CAMPEN M., DIAMANTI O., BOMMES D., HILDEBRANDT K., TECHNION M. B.-C., PANOZZO D.: Directional field synthesis, design, and processing. In *ACM SIGGRAPH 2017 Courses* (New York, NY, USA, 2017), SIGGRAPH '17, Association for Computing Machinery. URL: <https://doi.org/10.1145/3084873.3084921>, doi:10.1145/3084873.3084921. 2

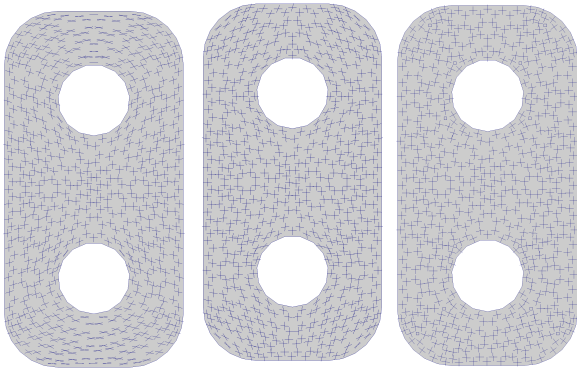


**Figure 5:** Un champ de repère non-orthogonal génère, sur un losange, des lignes de quadrilatères non-orthogonales de distortion nulle.

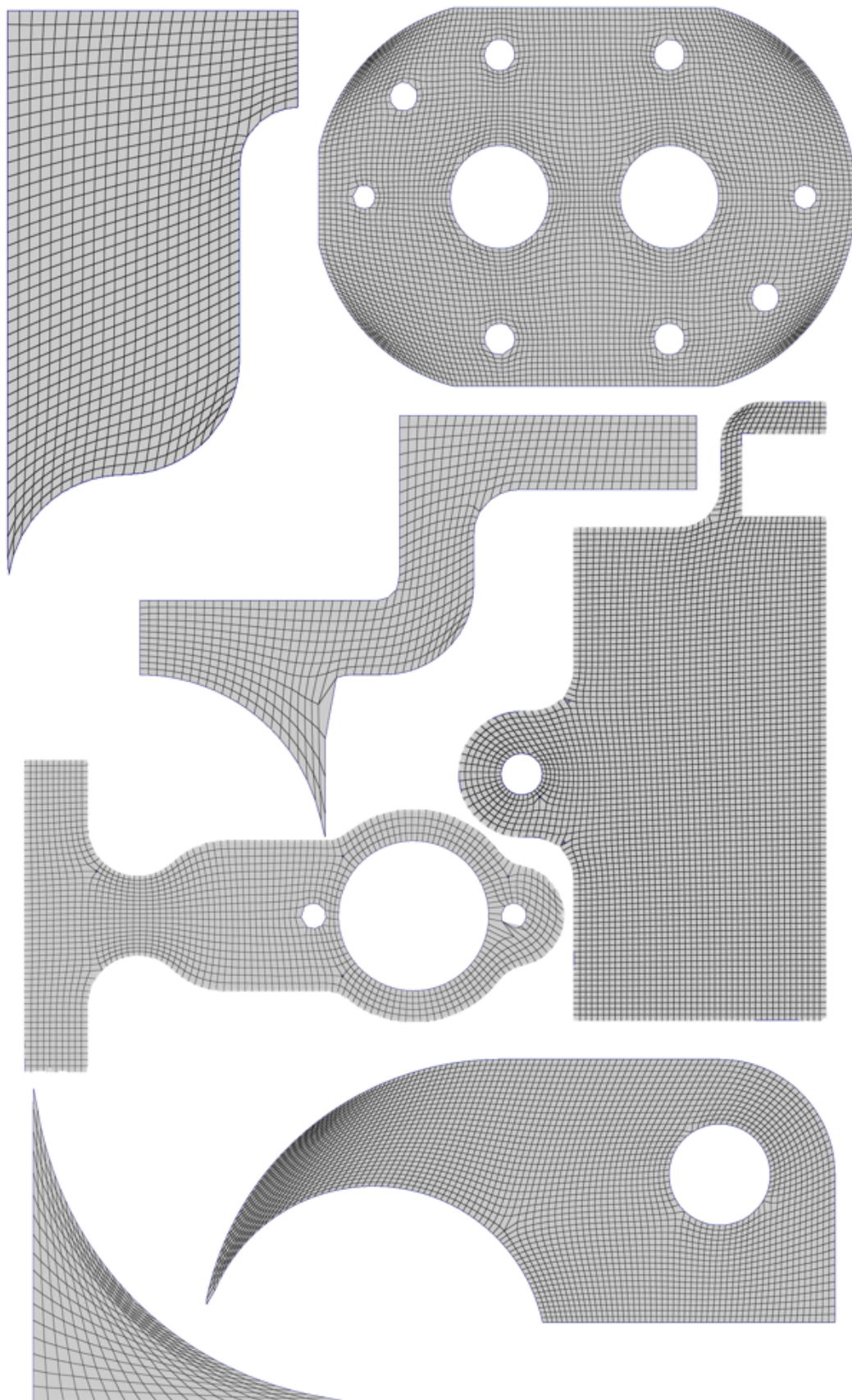




**Figure 6:** Maillage quadrangulaire issu d'un champ de repère non orthogonal. Notre algorithme détermine une solution de champ de repère ne comportant pas de singularité, et qui gère les coins à petits angles.



**Figure 7:** Différents poids d'orthogonalité dans l'énergie. Sans contrainte d'orthogonalité, les deux branches des repères ont d'avantage tendance à se rapprocher plutôt que de tourner ensemble. Les singularités du champ sont beaucoup moins coûteuses dans la minimisation d'énergie lorsque les branches des repères sont proches.



**Figure 8:** *Maillages quadrangulaires générés à partir de nos champs non orthogonaux*